Werner Kratz
Marius Hofert

Universität Ulm
Wintersemester 2008/2009
13.11.2008

Übungen zur Analysis 2

Blatt 6

Abgabe und Besprechung, Donnerstag, den 20.11.2008

Aufgabe 28 (7 Punkte)

Bestimme für folgende Punktmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ (siehe Aufgabe 27) jeweils das Innere $\overset{\circ}{M}$, den Rand ∂M und den Abschluß $\overline{M}$. Entscheide dabei, ob M offen, abgeschlossen oder kompakt ist.

(a) $M = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x - y \leq 3 \} \subset \mathbb{R}^2$.

(b) $M = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 4y^2 < 1 \} \subset \mathbb{R}^2$.

(c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{1}{2} \sin t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$.

(d) $M = [0, 1) \times (1, 2] \subset \mathbb{R}^2$.

(e) $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{ \frac{1}{n} \} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

(f) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 < z \leq x^2 + y^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

(g) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \leq t \leq 2\pi \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 29 (4 Punkte)

Beweise die *Folgenkompaktheit*: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge aus M eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in M liegt.

Aufgabe 30 (4 Punkte)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Zeige:

(a) M ist genau dann offen, wenn $M \cap \partial M = \varnothing$.

(b) M ist genau dann abgeschlossen, wenn $\partial M \subset M$ ist.

Aufgabe 31 (3 Punkte)

Es seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$. Zeige: $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$.

Aufgabe 32 (4 Punkte)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $M \neq \varnothing$. Zeige, dass die *Abstandsfunktion*

$$f(x) = d(x, M) := \inf_{y \in M} |x - y|$$

stetig auf $\mathbb{R}^n$ ist. Bestimme $d(x, M)$ für die Einheitskugel $M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| \leq 1\}$.

Hinweis
$d(x, M) - d(z, M) \leq |x - z|$ für alle $x, z \in \mathbb{R}^n$.

`http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mhofert/ana2/`